第一章 测量不确定度及数据处理方法

测量是科学实验、工农业生产、贸易以及日常生活中不可缺少的一项工作。当完成测量时，应当给出测量结果。一个完整的测量结果不仅要给出待测量的最佳估计值，而且还要给出测量结果的不确定度。这是目前国际上约定的做法，也是我国计量技术规范所要求的。本章在介绍测量与不确定度的相关概念及不确定度评定方法时，所依据参考文献为《测量不确定度表示导则》（简称 GUM）1995 版。

1.1 测量、误差及不确定度的基本概念

1. 量与量值

（1）被测量

作为测量对象的特定量。

测量前首先要对被测的特定量作明确说明，也就是对被测量进行定义。实际上，被测量定义的详细程度是依据所要求的测量准确度而定的。

（2）［量的］真值

与给定的特定量定义一致的量值。其中“量值”是指一个数乘以计量单位。

① 尽管真值的定义总是不完善的，因而真值不是唯一的，只存在与定义一致的一组真值，但是当被测量的定义引入的不确定性可以忽略时，认为真值是“实际惟一”的。在物理实验中，我们通常认为真值是惟一的。

② 真值是一个理想的概念，尽管它是客观地实际存在的，但通常是不可知的，只有在少数特殊情况下，我们能知道被测量的真值，例如三角形的内角之和的理论真值是180°。

③ 真值具有近似可知性，也正因为如此，才使测量有意义。

（3）［量的］约定真值

对于给定目的、具有适当不确定度的、赋予特定量的值。约定真值仅是真值的估计值，有时是约定采用的，有时是由测量标准确定而赋予被测量的值，所以也称为指定值、标准值、参考值等。

2. 测量与测量结果

（1）测量

测量的定义：以确定量值为目的的一组操作。

① 测量的目的就是要确定被测量的值，也就是要确定被测量的“真值”。由于实际的测量都不可能是非常完善的，因而通过测量赋予被测量的值只能是真值的一个估计值，即测量结果。

② 测量是一个过程，任何测量过程都包含五个要素：被测对象、测量方法、测量设备、测量环境、测量人员。

③ 测量方法按不同分类方式有多种类型，这里只介绍两种常用的分类方式：

按测量值获得的方法不同，可分为直接测量和间接测量。

直接测量的数学模型为$Y = X$，直接测量可以是单次测量，也可以是多次测量。

间接测量的数学模型为$Q = f(X, Y, \cdots, Z)$，式中Q为间接测量量，也称为输出量；

$X, Y, \cdots, Z$ 是各直接测量量，也称为输入量。

按测量条件的不同分为等精度测量和不等精度测量。等精度测量指测量的五个要素即测量对象、测量方法、测量设备、测量环境、测量人员均不发生改变的条件下多次重复测量；等精度测量又称为重复性测量。它是一个理想的概念，实际上的等精度测量是指各要素在测量过程中不发生显著变化。也正是由于这种不显著的微小变化导致各次测量值不尽相同。不等精度测量是指五个测量要素中除被测对象不能改变外，其他四个因素的任何一个发生改变所进行的测量。不等精度测量又称为复现性测量。

（2）测量结果

由测量所得到的赋予被测量的值。

① 测量结果仅是被测量的估计值；

② 对于直接多次测量, 测量结果就是所测得的多个测量值的平均值. 数学上可以证明, 算术平均值是真值的最佳估计值；对于单次直接测量，其测量结果也只能是仅有的这个测量值；对于间接测量，测量结果是由各直接测量结果根据函数关系计算而得到的值。

③ 由于测量结果仅仅是被测量真值的一个估计值，在表达测量结果时，必须给出它的不确定度（不确定度概念后面会进行讨论）。

④ 有些时候还应说明, 所给测量结果是未修正的测量结果还是已修正的测量结果。

3. 误差与修正值

（1）误差：测量结果与被测量的真值之差称为测量误差，简称为误差。用公式表示如下：

误差=测量结果－真值。

误差有两种表示形式：　绝对误差＝测量结果－真值

相对误差＝丨绝对误差丨/真值

①　由于真值未知，所以也无法获得误差。因而，误差只是一个理想的概念，一般不用测量误差描述测量结果。

②　当用约定真值代替真值时, 可得到误差的估计值而不是准确的误差。用公式表示为：

误差估计值＝测量结果－约定真值

它反映了测量结果偏离参考值的程度，误差估计值存在正、负之分。获得测量误差估计值的目的是为了对测量结果进行修正。

（2）系统误差：系统误差是在重复测量中保持不变或按可预见的方式变化的测量误差分量。它是在重复性条件下，对同一被测量进行无穷多次测量所得测量值的平均值（期望值）与被测量的真值之差。用公式表示为：

$$\text{系统误差}\,\varepsilon = \text{期望值}\,\mu - \text{真值}\,x_0$$

系统误差也是一个理想化的术语。只有当用约定真值代替真值，用期望值的估计值代替期望值时，可得到系统误差的估计值。获得了系统误差的估计值就可以对测量结果进行修正。

此外，分析系统误差产生的原因并采取适当的措施可以减小或消除系统误差。

（3）随机误差：在重复性测量中按不可预见的方式变化的测量误差的分量。它是测量结果与在重复性条件下对同一被测量进行无穷多次测量所得结果的平均值（即期望值）之差。用公式表示为：

$$\text{随机误差}\,\delta = \text{测量结果}\,\bar{x} - \text{期望值}\,\mu$$

由于期望值 μ 是一个理想的概念，所以每一个测量结果的随机误差就无法确定，通常随机误差 δ 服从一种概率分布，并且期望值为零。所以可以通过增加观测次数来减小随机误

差。

随机误差具有以下几个性质。

抵偿性：设多次测量出现的随机误差为δ_1，δ_2，…，δ_n，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\delta_i = 0$$

单峰性：即绝对值小的误差比绝对值大的误差出现的次数多。

有界性：误差的绝对值不会超过某一范围。

$$|\delta_i| \le |\delta_{\max}|$$

对称性：绝对值相等而符号相反的误差出现的概率相同。

由此得出结论：随机误差服从截尾正态分布，如图1.1.1所示。

随机误差产生的原因为多种因素的共同作用，这些因素包括前面提到的方法、人员、环境 、仪器以及被测对象等等，其中每一因素对测量结果的影响可能并不大，但众多因素的总和则将产生明显的影响，随机误差除服从统计规律外，无其他确定的规律。因此，随机误差不能修正。

值得提出的是，对于超出规定条件下预期的误差，通常称作粗大误差，它是由于实验者粗心大意或操作不当造成的一种人为误差，含有粗大误差的测量值称为坏值或异常值。粗大误差实质上是一种差错，它不属于测量误差，应在数据处理时予以剔除。

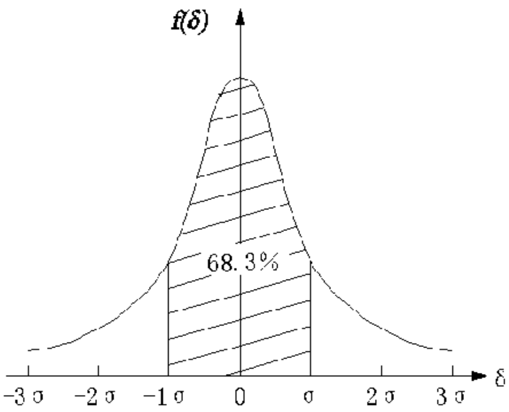

图1. 1. 1　正态截尾图

图 1. 1. 1　正态截尾图

测量误差Δ，系统误差ε，随机误差δ三者都是理想的概念，不可能通过测量得到它们的准确值，三者的关系可以表示为$\Delta = \varepsilon + \delta$，用图 1.1.2 表示如下：

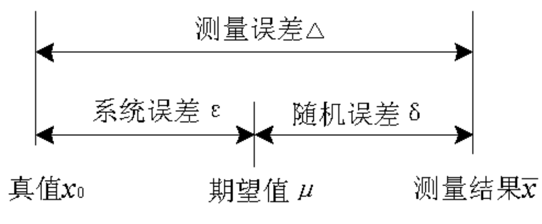

图 1.1.2 系统误差与随机误差的关系图

（4）修正值

修正值等于负的系统误差的估计值。

将修正值与测量结果相加，是为了在很大程度上减小系统误差。由于修正值只是负的系统误差的估计值，而不完全等于负的系统误差，因而经过修正后的测量结果仍含有一个比较小的未知的系统误差。

（5）对测量结果质量的定性描述：准确度与精密度。

［测量］准确度定义为：测量结果与被测量的真值之间的一致程度。有时也称为精确度。测量准确度只是对测量误差（包括系统误差与随机误差）的一个定性描述。准度度只有高低之分，没有具体的数值大小之分。

［测量］精密度定义为：在规定条件下，对同一个被测对象重复测量所得的测量结果间的一致程度。测量精密度也只是一个定性的概念。

这里要说明的是，人们在习惯中经常使用的“测量精度”一词有时指精确度（即准确度），有时指精密度，比较含混，所以建议不再使用[1]。

4. 测量不确定度的概念

（１）测量不确定度

表征测量结果的分散性，与测量结果相联系的参数。

下面利用实验结果的一种表达形式来说明不确定度的含意。设物理量 Y 的测量结果表达为

$$Y=\left(y\pm U\right),\quad 其中 U=ku_{(y)}$$

上式中 y 为测量结果，U 为不确定度，是一个恒正的值，上式给出的是一个区间 $\left[y-U, y+U\right]$，这个结果表达的含意是，被测量 Y 的真值以某一概率落入上述区间。因而不确定度 U 可以理解为“表征被测量的真值所处的量值范围的估计”，这正是国际通用计量学基本术语１９８４版本中对不确定度的定义。由于这个定义着眼于不可知的量——真值，因而现在不用了，但用于理解不确定度含意却相对容易些。而 GUM 对不确定度的新定义着眼的是被测量 Y 的测量值。由于各种因素的影响，Y 的测量值呈现一种概率分布，而测量值的分散性是用随机变量 Y 的概率分布的标准偏差 $u_{(y)}$ 来表征的。$u_{(y)}=U/k$，其中 k 通常取２～３之间的一个数。后面会说明 U 和 $u_{(y)}$ 是两种不同形式的不确定度。

（２）标准不确定度

以标准偏差表示的测量不确定度，其符号用 u 来表示。对每个不确定度来源评定的标准偏差，称为标准不确定度分量，用 u_i 表示。

标准不确定度的分量有两类评定方法：A 类评定和Ｂ类评定。

A 类标准不确定度：对于一系列测量值，用统计分析的方法进行不确定度评定得到的标准不确定度。用符号 u_A 表示。A 类标准不确定度用实验标准偏差来定量表征。

B 类标准不确定度：用非统计方法进行不确定度评定，得到的标准不确定度。用符号 u_B 表示。B 类标准不确定度用估计的标准偏差定量表征。

（３）合成标准不确定度

由各标准不确定度分量合成得到的标准不确定度，用符号u_c来表示。合成的方法称为测量不确定度传播律（传递律），由国际文件统一规定。

合成标准不确定度也可以用相对形式$u_c(q)/|q|$来表示，称为相对不确定度，有时也用符号u_{rel}或u_r表示。

（4）扩展不确定度

扩展不确定度由合成标准不确定度的倍数得到，用符号U表示。即$U=ku_c$，其中k称为包含因子（在数理统计中k称为置信因子），通常k的取值在2～3之间。

扩展不确定度在使用时分为两种情况，即U与U_p，这里$U=ku_c$，$U_p=k_pu_c$。$Y=y\pm U$说明Y的真值以较高的概率落入区间$\left[y-U,y+U\right]$，具体的概率值并未说明，$Y=y\pm U_p$说明Y的真值以概率p落入区间$\left[y-U_p,y+U_p\right]$，此时p称为包含概率（在数理统计中称为置信概率）。若$p=95\%$时U_p可写作U_{95}，同样当$p=99\%$时U_p可写作U_{99}，这都是规定的表示形式。区间$\left[y-U_p,y+U_p\right]$称为统计包含区间，U_p就是该区间的半宽度。

【阅读材料】对不确定度概念的几点说明

测量不确定度是测量结果表达时必不可少的一个参数，由于以前长期将“确定的误差”与“可能的误差”相混淆来描述测量结果，加之对不确定度概念的正确理解和使用还处于推行阶段。这里有必要对测量不确定度概念再做几点必要的说明。

① 在统计学中，标准偏差作为随机变量的一个数字特征，用来描述随机变量取值的分散性。当测量结果为单次测量值时，随机变量就是直接测量的待测量X；当测量结果以多次测量的平均值表示时，随机变量就是$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$；当待测量为间接测量量时，随机变量就是$Q=f\left(X,Y,\cdots Z\right)$，这三种情况下，分别用标准偏差的估计值$u_{(x)}$，$u_{(\bar{x})}$，$u_{(q)}$来描述$X$，$\overline{X}$，$Q$的取值的分散性。由此就可以理解，单次测量值也是有分散性的，也就是说，以单次测量值作为测量结果时也是有不确定度的。

② 测量不确定度的来源主要与测量的五个要素有关，每个测量因素或其不同的组合都会影响测量不确定度，因而不确定度通常可能有多个分量。在评定这些分量时不区分其性质，只关心评定的方法，因而也就不存在“随机不确定度”和“系统不确定度”这样的说法。

③ 在使用不确定时分为两种情形。第一种情形是：不带形容词的测量不确定度用于一般概念和定性描述；第二种情形是带形容词的测量不确定度，包括：标准不确定度、合成不确定度和扩展不确定度，用于对测量结果的不确定度进行定量的描述。

④测量误差与测量不确定度的主要区别：测量不确定度是经典的误差理论的产物，使用

测量不确定度的目的是为了澄清一些模糊的概念以及便于实际使用,使用不确定度来描述测量结果并不是停止使用误差的概念。测量误差与测量不确定度由于其概念不同，各有各的用处，不能相互代替。误差与不确定度的主要区别有两点：第一，误差表示测量结果偏离真值的程度，而不确定度表明了测量结果的分散性，测量结果不同，其误差一定不同，但对于不确定度而言，不同的测量结果（例如测量列中的任何一个值）可以有相同的不确定度；第二，误差是一个客观存在的值（尽管通常不知道它的大小），它不以人的认识程度而改变，测量不确定度与人们对被测量的影响量及测量过程的认识有关。测量不确定度很小，并不代表误差很小，有的时候实际误差可能很大，但由于人们的认识不足，掌握的相关信息不够，造成了给出的不确定度可能很小。例如当存在还未发现的较大系统误差时。

有的资料中将不确定度称为不确定性误差的变化程度[5]，也有称做可能误差的量度[4]，而误差一般只用于表示确定性的误差，这种提法有助于理解误差与不确定度之间的区别。

1.2 测量不确定度的评定与测量结果的报告

评定测量不确定度的一般步骤是在明确测量的五个要素（即被测量的定义，测量方法，测量仪器，测量条件及测量人员）的基础上建立数学模型，也就是给出被测量与各直接测量量以及影响量之间的函数关系；分析不确定度来源；评定标准不确定度分量；计算合成标准不确定度；确定扩展不确定度。在评定不确定度时不仅需要有一定的数理统计知识，还需要对不确定度的来源有一定的分析能力，而且还需要掌握充分可靠的相关信息。这对于初学者来说具有一定的困难，因而本书采用简单化处理的方法来评定测量不确定度，也就是认为各不确定度分量独立，在 B 类评定中，仅限于考虑由仪器产生的不确定度分量。

1. 标准不确定度的 A 类评定

用统计的方法对标准不确定度进行评定,称为 A 类评定。

设 X 为待测量，在重复性条件下，进行 n 次独立观测得到的测量列为 x_1，x_2，…，x_n，

（1）测量列的算术平均值为：

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$\bar{x}$ 又称为样本平均值，它就是 X 在无穷多次测量时所得平均值（即期望值）μ 的最佳估计值。因此 X 的测量结果就是 $\bar{x}$。

（2）实验标准偏差 $s(x)$：也就是测量列的标准偏差（标准偏差也称为标准差），它是随机样本标准偏差 $s(X)$ 的一个取值，也是 X 所服从的统计分布的标准差 σ 的估计值。$s(x)$ 通常用贝塞尔公式计算（在测量次数很少时可用其它方法计算）：

$$s(x) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})}{n-1}} \qquad (1.2.1)$$

如果用测量列中的任意一个值作为测量结果，其 A 类标准不确定度分量就是 $s(x)$。

（3）平均值的实验标准偏差：由于测量结果是用测量列的平均值 $\bar{x}$ 表示的，而 $\overline{X}$ 作为一个随机变量，它的标准差 $\sigma/\sqrt{n}$ 的估计值为 $s(x)/\sqrt{n}$。以 $\bar{x}$ 作为实验结果时，按 A 类方法评定得到的标准不确定度分量为

$$u_A(x)=s(\bar{x})=s(x)/\sqrt{n}$$

即
$$u_A(x)=\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} \qquad (1.2.2)$$

从上式可以看出 $u_A(x)$ 与 $1/\sqrt{n}$ 成正比，增加测量次数 n 可以减小不确定度 $u_A(x)$，但当 $n>20$ 时，$1/\sqrt{n}$ 的减小变得很缓慢，通常取 n 为 6～20。

2. 标准不确定度的 B 类评定

用非统计的方法对标准不确定度进行评定，称为 B 类评定。B 类标准不确定度评定的一般做法是：先利用一切可以利用的信息和经验判断被测量 X 的值落入区间 $(x-a,x+a)$ 的概率 p，再假设被测量的概率分布, 进而获得对应于置信水平 p 的置信因子 k，则 B 类标准不确定度 u_B 由下式计算获得

$$u_B=\frac{a}{k} \qquad (1.2.3)$$

式中 a 为置信区间的半宽度；k 为置信因子。

可以看出, 评定 B 类标准不确定度的关键是要获得置信区间的半宽度 a 和置信因子 k。

下面就几种常见的情况说明 a 和 k 的确定。

（1）在获得仪器的“最大允许误差”的情况下:

最大允许误差是指对于给定的测量仪器，规程、规范等所允许的误差极限值，有时也称为允许误差限。经检验合格的仪器设备在使用时，示值的误差不超过这一“误差限”。设仪器的允许误差限为 $\pm\Delta_{仪}$，并认为误差的分布为均匀分布，此时 $a=\Delta_{仪}$，$k=\sqrt{3}$，则

$$u_B(x)=\Delta_{仪}/\sqrt{3} \qquad (1.2.4)$$

利用电表的准确度等级信息来评定 B 类不确定度分量也属于这一类型。例如某电表为 2 级，其测量上限为 x_m，则最大引用误差（示值的最大相对误差）为 $\pm 2\%$，$\Delta_{仪}=x_m\cdot 2\%$，则有

$$u_B=x_m\cdot 2\%/\sqrt{3}\text{。}$$

（2）在获知仪器分辨力为 δ_x 的情况下:

分辨力是指仪器能有效辨别的最小示值差。对于数字式仪器，其分辨力就是最末一位读

数改变“1”时的读数差。此时取$a=\delta_x/2$，并认为误差分布为均匀分布，则

$$u_B(x)=\frac{a}{\sqrt{3}}=\frac{\delta_x}{2\sqrt{3}}=0.29\delta_x \tag{1.2.5}$$

（3）在获得扩展不确定度及包含因子k的情况下:

这是一个由扩展不确定度求标准不确定度的情况。由于这个扩展不确定度是引用的，所以对引用者而言就是B类分量。此时

$$u_B(x)=\frac{U(x)}{k} \quad 或 \quad u_B(x)=\frac{U_p}{k_p} \tag{1.2.6}$$

扩展不确定度及其包含因子可由仪器的检定证书或校准证书等信息来源得到.

3. 计算合成标准不确定度

合成标准不确定度u_c是由各标准不确定度分量合成得到的，不必区分是由 A 类还是 B 类方法评定得到，因而待测量X的测量结果的各标准不确定度可以统一用$u_i(x)$表示，而不一定非要明确表示成u_A或u_B。

这里分两种情况说明合成标准不确定度的计算：

（1）直接测量结果的合成标准不确定度的计算

假设各不确定度分量互不相关，x有m个标准不确定度$u_i(x)$，$i=1,2,\cdots,m$，则

$$u_c(x)=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}u_i^2} \tag{1.2.7}$$

（2）间接测量结果的合成标准不确定度的计算

设$Q=f(X,Y,\cdots,Z)$，其中Q是间接测量量，$X,Y,\cdots,Z$均为直接测量量，并设各直接测量量互相不相关，被测量的测量结果为$q=f(x,y,\cdots,z)$，q的合成标准不确定度$u_c(q)$由下式计算

$$u_c(q)=\sqrt{\left[\frac{\partial f}{\partial x}u_c(x)\right]^2+\left[\frac{\partial f}{\partial y}u_c(y)\right]^2+\cdots+\left[\frac{\partial f}{\partial z}u_c(z)\right]^2} \tag{1.2.8}$$

其中$\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\cdots,\frac{\partial f}{\partial z}$称为灵敏系数。式（1.2.8）称为不确定度传播律或不确定度传递律。

相对合成不确定度u_{rel}由下式计算

$$u_{rel}=u_c(q)\big/|q|=\sqrt{\left[\frac{\partial\ln f}{\partial x}u_c(x)\right]^2+\left[\frac{\partial\ln f}{\partial y}u_c(y)\right]^2+\cdots+\left[\frac{\partial\ln f}{\partial z}u_c(z)\right]^2} \tag{1.2.9}$$

以上两式是实验中经常要用到的两个公式，通常为便于计算，对于函数表达式

$Q=f\left(X,Y,\cdots,Z\right)$为和、差关系时，按（1.2.8）式计算合成标准不确定度。而对于函数表达式为积、商、幂的形式时，可先按（1.2.9）式求出相对合成不确定度u_{rel}，再乘以q求出合成标准不确定度。

下表给出了常用函数的合成标准不确定度传递公式。

表 1.2.1 常用函数的合成标准不确定度传递公式

函数关系式	合成标准不确定度传递公式
$q=x\pm y$	$u_c(q)=\sqrt{u_c^2(x)+u_c^2(y)}$
$q=x\cdot y,q=\dfrac{x}{y}$	$\dfrac{u_c(q)}{\lvert q\rvert}=\sqrt{\left(\dfrac{u_c(x)}{x}\right)^2+\left(\dfrac{u_c(y)}{y}\right)^2}$
$q=kx$	$u_c(q)=ku_c(x)$
$q=\sqrt[k]{x}$	$u_{rel}(q)=\dfrac{1}{k}\cdot\dfrac{u_c(x)}{\lvert x\rvert}$
$q=x^k$	$u_{rel}(q)=k\cdot\dfrac{u_c(x)}{\lvert x\rvert}$
$q=\dfrac{x^k\cdot y^m}{z^n}$	$u_{rel}(q)=\sqrt{k^2\left(\dfrac{u_c(x)}{x}\right)^2+m^2\left(\dfrac{u_c(y)}{y}\right)^2+n^2\left(\dfrac{u_c(z)}{z}\right)^2}$
$q=\sin x$	$u_c(q)=\lvert cosx\rvert\cdot u_c(x)$
$q=\ln x$	$u_c(q)=\dfrac{u_c(x)}{x}$

4. 确定扩展不确定度

确定扩展不确定度就是确定公式$U=ku_c$中的包含因子k或$U_p=k_pu_c$中的k_p。对于$U=ku_c$，国际上约定采用$k=2$，美国及西欧一些国家规定未注明k值时是指$k=2$，我国规定采用扩展不确定度时，必须注明k值。

取$k=2$的理由是：当待测量Q的分布接近正态分布时，包含区间$\left[q-2u_c,q+2u_c\right]$具有的置信水平约为95%，包含区间$\left[q-3u_c,q+3u_c\right]$具有的置信水平约为 99%。在工程应用中，人们不需要将k值计算的十分准确，而且一般取95%左右的置信水平也就足够了，所以在Q的分布不清楚时，取$k=2$意味着区间$\left[q-2u_c,q+2u_c\right]$具有比较高的置信水平。

如果对置信水平提出明确要求时，则采用$U_p=k_pu_c$，此时需要了解待测量的分布情况，还要计算合成标准不确定度的有效自由度。

5. 测量结果及其不确定度的报告

完整的测量结果报告应当包括两项内容：测量结果及其不确定度。其中测量结果就是待测量的最佳估计值，包括数值和单位。这里要说明的是，日常生活中由于对测量的要求不是很严格，通常只给出了测量结果，虽然没有给出测量结果的不确定度，但其不确定度也是可以评定的。

测量结果的不确定度可以使用合成标准不确定度，也可以使用扩展不确定度或者是他们的相对形式，但在使用场合上是有区别的。合成标准不确定度一般用于基本物理常量测定和基础计量学研究，而一般的测量及应用性测量都是以扩展不确定度的形式报告。

（1）合成标准不确定度的三种报告形式

设某物的质量 m_s 的测量结果为 100.02876g，其合成标准不确定度 $u_c(m_s)$ 为 0.32 mg，则报告形式有以下三种

① “$m_s = 100.02876$g，$u_c = 0.32$mg”；

② “$m_s = 100.02876(32)$g”，其中括号中的数是合成标准不确定度 u_c 的数值，u_c 与测量结果的最后位对齐；

③ “$m_s = 100.02876(0.00032)$g”，括号中的数是 u_c 的值，以所说明的测量结果的单位表示。

这里要特别说明的是，一般不提倡采用“$m_s = (100.02876 \pm 0.00032)$g”形式，因为这种形式已被传统地用于表示高置信水平的区间。

（2）扩展不确定的两种报告形式

扩展不确定度分 U 和 U_p 两种形式。这里只说明当 $U = ku_c$ 情况下的两种报告形式，仍以前述测量为例。

① “$m_s = 100.02876$g，$U = 0.64$mg，$k = 2$”；

② “$m_s = (100.02876 \pm 0.00064)$g，$k = 2$”。

6．测量不确定度评定举例

（1）测量目的

测量圆柱体的体积 V。

（2）测量方法

用千分尺测量圆柱体的直径 D，用分度值为 0.02mm 的游标卡尺测量圆柱体的长度 L，则

$$V = \frac{\pi}{4} D^2 L$$

（3）测量数据及测量结果

表 1.2.2 圆柱体直径与长度测量数据

次数	1	2	3	4	5	6	平均值
D/mm	18.008	18.012	18.018	18.020	18.006	18.022	18.01433
L/mm	50.02	50.04	50.12	50.00	50.08	50.18	50.0733

测量结果 $\overline{V} = \frac{\pi}{4}\left(\overline{D}\right)^2 \overline{L} = 12762.404$ mm³。

（4）测量不确定度主要来源分析

① 圆柱体直径测量的重复性

② 圆柱体长度测量的重复性

③ 千分尺不准

④ 游标卡尺不准

（5）标准不确定度分量的评定

① 用 A 类方法评定由圆柱体直径测量重复性引入的标准不确定度

测量圆柱体直径所得测量列的实验标准偏差 $s(D)$

$$s(D)=\sqrt{\frac{1}{(6-1)}\sum_{i=1}^{6}\left(D_i-\overline{D}\right)^2}=0.006623\ \text{mm}$$

圆柱体直径平均值的实验标准偏差 $s(\overline{D})$

$$s(\overline{D})=\frac{s(D)}{\sqrt{6}}=0.0027\ \text{mm}$$

由圆柱体直径测量重复性引入的标准不确定度 $u_1(D)$

$$u_1(D)=s(\overline{D})=0.0027\ \text{mm}$$

② 用 A 类方法评定由圆柱体长度测量重复性引入的标准不确定度

$$u_1(L)=s(\overline{L})=\frac{s(L)}{\sqrt{6}}=\frac{0.0677}{\sqrt{6}}=0.0276\ \text{mm}$$

③ 用 B 类方法评定由千分尺的不准引入的标准不确定度

由千分尺的说明书可知，其最大允许误差为 ± 0.004 mm，设误差服从均匀分布，则圆柱体直径的置信区间半宽度 $a_1=0.004$ mm，置信因子 $k=\sqrt{3}$，得

$$u_2(D)=\frac{a_1}{\sqrt{3}}=0.00231\ \text{mm}$$

④ 用 B 类方法评定由游标卡尺的不准引入的标准不确定度

由游标卡尺的说明书可知，其最大允许误差为 ± 0.02 mm，设误差服从均匀分布，则圆柱体长度的置信区间半宽度 $a_2=0.02$ mm，置信因子 $k=\sqrt{3}$，得

$$u_2(L)=\frac{a_2}{\sqrt{3}}=0.0115\ \text{mm}$$

（6）计算灵敏系数

$$c(D)=\frac{\partial V}{\partial D}=\frac{2\pi DL}{4}=1416.92\ \text{mm}^2$$

$$c(L)=\frac{\partial V}{\partial L}=\frac{\pi}{4}D^2=254.88\ \text{mm}^2$$

（7）计算合成标准不确定度 $u_c(V)$

$$u_c(V)=\sqrt{c^2(D)\left(u_1^2(D)+u_2^2(D)\right)+c^2(L)\left(u_1^2(L)+u_2^2(L)\right)}=9.133\ \text{mm}^3$$

（8）确定扩展不确定度U

$$U = 2u_c(V) = 18.27\ \text{mm}^3\text{，包含因子}\ k = 2$$

（9）最终测量结果表达

$$V = (12762 \pm 19)\ \text{mm}^3\text{，包含因子}\ k = 2$$

1.3 有效数字

1.有效数字的概念

任何测量结果都只能是真值的一个近似值，都具有不确定度。如果测量结果的某一位具有了不确定性（通常称此位为存疑位），那么，此位以后的数字便失去意义。因此，测量结果一般只写到存疑位。我们把测量结果中可靠的几位数字加上存疑的一位数字统称为测量结果的有效数字，有效数字的个数称为有效数字的位数，其规定用示意图表示如下:

$$\overbrace{A\quad B\quad C\quad \ldots\quad Z}^{n\text{位}}$$

$$\uparrow \qquad\qquad\qquad\qquad \uparrow$$

第一位非零数字　　存疑位

由此可以看出，有效数字粗略地反映了测量不确定度，而不确定度则是对有效数字中最后一位数字不确定程度的定量描述。

2. 直接测量读数的有效数字

用两种“分度值”不同的测量长度的工具对同一对象进行长度测量，如图 1.3.1 所示。

（1）用分度值为 1cm 的尺子测，得到的长度为 2.4cm；

（2）用分度值为 1mm 的尺子测，得到的长度为 2.36cm；

图1.3.1 仪器精度与有效数字的关系图

图 1.3.1 仪器精度与有效数字的关系

由此可以看出,用具有不同分辨力的测量仪器对同一待测量进行测量,所得到的有效数字的位数是不同的,但这些数字的最后一位(数字下带有“﹏”标记)都是通过估读产生的,因而是存疑位.这说明直接测量读数的有效数字与测量仪器的分辨力有关。

对于数字显示式仪表来说,其示值的最后一位为存疑位。

3.测量不确定度的有效数字

GUM 规定，无论是标准不确定度还是扩展不确定度，不应给出过多位数的有效数字，并提出最多为两位有效数字，这是一个总的提法。通常可供参考的做法是，不确定度的第一位有效数字是 1 或 2 时，给出两位有效数字，而 3 以上时给出一位有效数字。

把数据中多余的数字去除，称为修约。通常的修约规则为“四舍六入五凑偶”，其意思是对于应保留数字的最后一位，若它后面的数小于等于 4，则舍去；大于等于 6，则向末位进 1；等于 5，应使末位变成偶数。也就是说，当末位原来为偶数时，将其后的 5 舍去，末位原来为奇数时，将后面的 5 进上来。值得注意的是，这种修约是一次性的而不能逐次进行。例如将 6.2347 修约到小数点后第二位，应为 6.23（错误的做法是 $6.2347 \xrightarrow{\text{第一次修改}} 6.235 \xrightarrow{\text{第二次修改}} 6.24$）。

对测量不确定度的修约，一般按通用规则“四舍六入五凑偶”进行。但有时为了保险起见，也可将不确定度的末位后的数字全部进位而不舍去。例如，标准不确定度 $u_c = 10.27$ mm 取两位有效数字，可取 $u_c = 11$ mm。

4. 测量结果的有效数字

测量结果的末位应与其测量不确定度的末位对齐，可简称为“末位对齐”。这里要说明的是，当不确定度保留两位有效数字时，测量结果的最后两位均为存疑位，这种情况无碍于测量结果的使用[4]。

5. 计算过程的数字位数

在计算过程中，为了避免因过多舍入而影响最终计算结果的准确性，作为中间结果的有效数字应参照测量结果有效数字的要求，一般多保留 1～2 位。

6. 应注意的几个问题

（1）当直接读数的末位估读数“0”时，不应漏掉。例如有，用 mm 尺读出的长度值为 2.40cm 时，不应写成 2.4cm，前者的估读数字为“0”，后者的估读数字为“4”，二者是完全不同的。

（2）对有效数字的单位进行换算时不应改变有效数字的位数。例如 0.83m 可写成 83cm，但不能写成 830mm，因为 0.83 和 83 均有两位有效数字，而 830 有三位有效数字。有效数字的位数不同，测量结果的准确度不同，因而不能随意增减有效数字的位数。为了避免因单位换算而产生有效数字位数的改变，常采用科学计数法来表示。例如

$$0.83\text{m} = 8.3 \times 10^{-1}\text{m} = 8.3 \times 10^{2}\text{mm}$$

（3）对于纯数学数，如 π，e，$\sqrt{2}$ 等，其有效数字可以认为是无限的，使用时可根据需要进行修约。

1.4 实验数据处理的常用方法

数据处理是物理实验的重要组成部分，数据处理贯穿于物理实验的全部过程之中，如实验前根据对实验结果准确度要求选择实验方案，在实验进行时要考虑实验条件的满足情况，实验结束后要得出实验结果，这里我们说的数据处理主要指根据所测得的实验数据进行分析、研究得到实验结论。在物理实验中常用的数据处理方法有列表法、作图法、逐差法、最小二乘法等。

1．列表法

在数据处理时采用列表法，可以对数据进行比较，有助于发现自变量和因变量之间的关系，同时也便于检查和发现实验中存在的问题。列表法用于处理数据，还可将一些中间过程的计算值和实验结果及其不确定度一起列入表中。在物理实验中，我们要求学生熟练掌握列表的一般要求，能在实验数据记录和处理时，设计出比较合理的表格，表格设计的基本要求如下：

（1）表格设计的目的、内容与形式应当统一起来。仅用于实验过程中记录数据的表格和数据处理用的表格在内容上是有差异的，即使同为数据处理用的表格，其内容和形式也会有所不同，有时还可以用几个表一起来反映数据处理过程和处理结果。

（2）表中的所有栏目必须注明名称和相应的单位。

（3）表格的结构应简单明了，有关项目应合理排列，并注意各内容之间的相互联系。

举例：用伏安法测电阻时，电压、电流的关系如表1.4.1所示。

表 1.4.1电阻的伏安关系

U/V	0.00	1.00	2.00	3.00	4.00	5.00	6.00	7.00	8.00	$\overline{R}=3965\Omega$
I/mA	0.00	0.25	0.51	0.76	1.02	1.26	1.49	1.77	2.01	$s_{\overline{R}}=13\Omega$

2．作图法

作图法适用于没有完全掌握物理量之间的关系，通过作图可以大致发现自变量和因变量之间的变化规律，或函数关系，有时也可以通过作图粗略求出函数关系中的一些参数，也就是通常所说的图示法和图解法。

（1）作图的基本要求

1）作图必须标示图名和图注，必要时应将实验的有关条件，重要参数等附于图的上部或下部；

2）根据作图需要选择坐标纸，通常可供选择的有直角坐标纸、单对数坐标纸、双对数坐标纸等。

3）合理选择坐标起点和比例。坐标起点可以不从零开始，这主要是为了控制所作图的位置应大致处于图纸的中间而不致偏向一边或一角；坐标轴的标值一般情况下应和测量值的有效数字一致，而且可根据实际问题选择相同或不同的纵、横坐标值比例。

4）图中的标点和连线应规范，即标点的大小要一致，可以采用“.”、“+”、“×” 、“Δ”等符号，在连成线时，如果连成的是曲线，则应光滑平顺，如果连成的是直线，则应在所测实验点的平均位置画出直线。

（2）作图法的优缺点

作图法的最大优点是形象直观，最大缺点是准确度差。作图不仅可以清楚反映出物理量之间的关系和量值的分布情况，而且还可以通过作图消除部分随机误差，获得平均效果。在有些情况下可以通过合理的内插或外推得到实际中无法获得的测量数据，至于作图法准确性差可以根据问题的不同采用其它方法得到解决，如对线性函数求斜率和截距时可采用最小二乘法解决。

（3）作图法应用举例

1）用作图法求直线的斜率、截距和经验公式。

图1.41是用伏安法测电阻时的电压、电流关系图，从图中可以看出各点的电压U和电流I成线性关系，在实验点的平均位置做出直线，直线上的A点和B点的坐标是从图中取得的，而不是直接测量值。

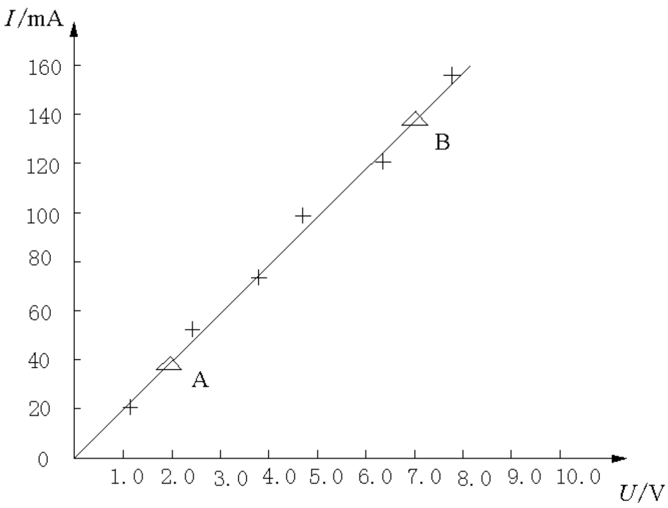

图1.4.1

图1.4.1 用作图法求电压电流的关系

设这一直线的方程为： $I = kU + b$

则 $$k = \frac{I_A - I_B}{U_A - U_B}$$

电阻 $$R = 1/k$$

截距b可从图中直接读出，也可以根据直线的点斜式求出截距

$$b = I_A - kU_A = I_A - \frac{I_A - I_B}{U_A - U_B} U_A$$

2）曲线的线性化

在实际中，经常会遇到一些函数不是线性关系，在下列情况下，可以对原函数关系进行变量代换，适当选取横轴和纵轴，就可将它们转化为线性关系进行研究，见表 1.4.2 所示。

表 1.4.2

原函数关系	线性化形式	横轴	纵轴	斜率	截距l（m）
$y = ax^b$	$\ln y = b\ln x + \ln a$	$\ln x$	$\ln y$	b	$\ln a$
$y = ae^{bx}$	$\ln y = bx + \ln a$	x	$\ln y$	b	$\ln a$
$y = a \cdot b^x$	$\ln y = (\ln b) \cdot x + \ln a$	x	$\ln y$	$\ln b$	$\ln a$
$x \cdot y = c$ (c为常量)	$y = c\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$	y	c	0
$y^2 = a \cdot x$	/	x	y^2	a	0
$y = \frac{x}{a + bx}$	$\frac{1}{y} = a\frac{1}{x} + b$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{y}$	a	b

从上面可以看出，横轴与纵轴的选取需根据具体问题而定，进而选择相应的坐标纸。

3．逐差法

逐差法在物理实验中常用来求线性函数的参数,如

$$y = ax + b \tag{1.4.1}$$

式中a, b为参数。数学知识告诉我们只要有两个方程,即有两对(x, y)值就可以求解a和b，这与用作图法的情况是完全相同的。作图法是在坐标纸上描两个点就可以作出一条直线，然

后求斜率和截距，问题就得到解决了。但从实验测量的角度出发，每次测量都是有误差的(即误差公理)，实验中可以通过多次测量来减小随机误差的影响，因而通常测得的(x, y)值要多于两组。而且在实验中，我们常可以控制自变量x的值，使它的取值成等差数列。

即
$$x_{i+1} - x_i = \Delta x \qquad i = 1,2,\cdots,(2n-1) \tag{1.4.2}$$

Δx与测量的序次无关，为常量。式(1.4.2)又可表达为

$$x_{i+k} - x_i = k\Delta x \qquad i = 1,2,\cdots,(2n-k) \tag{1.4.3}$$

取测量列中的两点(x_i, y_i), (x_{i+k}, y_{i+k})，并设此二点确定的直线的斜率为a_i,则

$$y_{i+k} - y_i = a_i(x_{i+k} - x_i) = a_i k \cdot \Delta x \tag{1.4.4}$$

$$a_i = \frac{y_{i+k} - y_i}{k\Delta x} \qquad i = 1,2\cdots,(2n-k) \tag{1.4.5}$$

对斜率取平均值则有：

$$\bar{a} = \frac{\overline{y_{i+k} - y_i}}{k\Delta x} \qquad i = 1,2\cdots,(2n-k) \tag{1.4.6}$$

实验中一般测量$2n$组(x_i, y_i),在上式中,

取$k = 1$时，有

$$\overline{y_{i+1} - y_i} = \frac{1}{2n-1}\sum_{i=1}^{2n-1}(y_{i+1} - y_i) = \frac{1}{2n-1}(y_{2n} - y_1)$$

这称为逐项逐差，它仅用了测量列的首尾两项y_{2n}和y_1

取$k = 2$时，有

$$\overline{y_{i+2} - y_i} = \frac{1}{2n-2}\sum_{i=1}^{2n-2}(y_{i+2} - y_i) = \frac{1}{2n-2}[(y_{2n} - y_2) + (y_{2n-1} - y_1)]$$

这称为隔项逐差，它只用了首尾四项。

取$k = n$时，$\overline{y_{i+n} - y_i} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_{i+n} - y_i) \qquad i = 1,2,\ldots,n$

这称为隔n项逐差，它将$2n$组数据全部都用上了。此时

$$\bar{a} = \frac{\overline{y_{i+n} - y_i}}{n\Delta x} \qquad i = 1,2,\ldots,n \tag{1.4.7}$$

通过以上分析我们可以得出如下结论：对于$y = ax + b$的线性函数，如果自变量等间距变化，可以将$2n$个数据分成两组，对因变量隔n项逐差，求得平均值，进而可求得斜率。

截距可由下式求出

$$b = \bar{b} = \bar{y} - \bar{a} \cdot \bar{x} \tag{1.4.8}$$

此外，逐差法也可以用来验证函数关系是否满足线性，其思想为：在$\Delta x = x_{i+1} - x_i$与i无关的情况下，观察$y_{i+1} - y_i$是否与i有关，若与i无关，则证明函数关系符合线性，这时应注意的问题是，尽可能逐项逐差，当然也可采用作图法来观察。

举例：用逐差法求弹簧的倔强系数，见表1.4.3所示。

表 1.4.3

数据记录	次　　数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	砝码质量m/g	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5
	弹簧上端位置 l/cm	1.54	2.02	2.50	2.94	3.44	3.94	4.40	4.90	5.37	5.85
数据处理	每增2.5g时弹簧的伸长量 $\Delta l_i = l_{i+5} - l_i$ cm	$l_6 - l_1$ =2.40	$l_7 - l_2$ =2.38	$l_8 - l_3$ =2.40	$l_9 - l_4$ =2.43	$l_{10} - l_5$ =2.41	倔强系数的平均值 $\overline{K} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} K_i = 1.019N/m$				
	倔 强 系 数 $K_i = 5\Delta mg / \Delta l$ N/m	1.0208	1.0394	1.0208	1.0082	1.0166	$\overline{K}$的实验标准差 $s_{\bar{k}} = \sqrt{\frac{1}{5\times 4}\sum_{i=1}^{5}(\overline{K} - K_i)^2} = 0.005N/m$				

4．最小二乘法

（1）问题的提出：

设自变量为x,因变量为y,现测得如下数据

$$(x_1, y_1),(x_2, y_2),\cdots,(x_n, y_n)$$

我们的目的是根据这一组数据分析变量x与y之间是否存在线性关系，若存在，则求出斜率和截距的估计值，进而确定x与y的关系。这种用测量数据分析并找出变量间关系的方法称为回归分析。这与作图法求解直线的斜率和截距是相似的，但不同的是，用作图法确定的直线不是惟一的，用回归分析法可求得一条最佳的直线，也就是说，线性关系存在时，从上述实验数据求出的斜率和截距应是唯一的。

下面我们先假设线性关系存在，即$y = ax + b$，并认为x_i的测量没有误差，y_i仅存在随机误差，利用测量数据并根据最小二乘原理计算a与b的最佳估计值。

（2）用最小二乘法确定直线的斜率和截距：

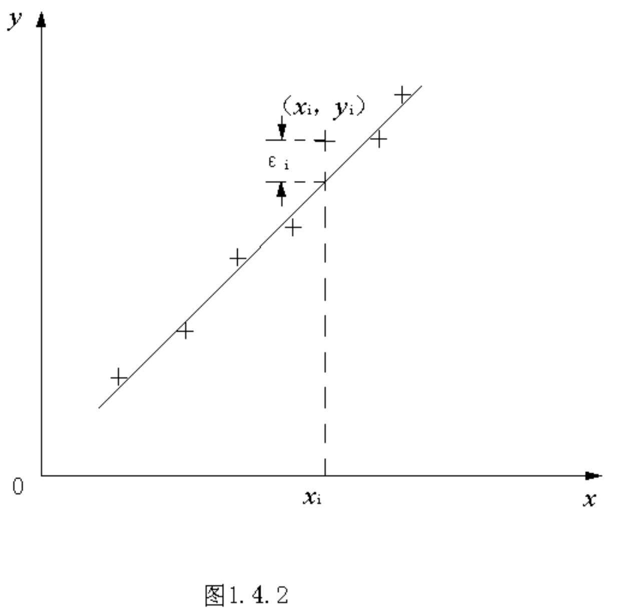

图1.4.2 最小二乘法原理图

根据最小二乘原理有

$$\sum_{i=1}^{n}{\varepsilon_i}^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{a}x_i - \hat{b})^2 \qquad (1.4.9)$$

上式中$\hat{y}_i$为对应于x_i的最佳估计值，它也是所找到的最佳直线上对应于x_i的纵坐标，如图1.4.2，$\hat{a}$和$\hat{b}$分别为函数关系式中a 和b的最佳估计值。

令
$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \hat{a}}\left(\sum_{i=1}^{n}{\varepsilon_i}^2\right) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial \hat{b}}\left(\sum_{i=1}^{n}{\varepsilon_i}^2\right) = 0 \end{cases}$$

解得

$$\left.\begin{aligned}\hat{a} &= \frac{\bar{x}\bar{y}-\overline{xy}}{\bar{x}^2-\overline{x^2}}\\ \hat{b} &= \bar{y}-\hat{a}\bar{x}\\ \hat{y} &= \hat{a}x+\hat{b}\end{aligned}\right\} \qquad (1.4.10)$$

式中
$$\begin{cases}\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\\ \bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i\\ \overline{xy}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\\ \overline{x^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2\end{cases}$$

从式1.4.10可得

$$\hat{y}=\bar{y}+\hat{a}\,(x-\bar{x}) \qquad (1.4.11)$$

式（1.4.11）说明，由所有实验数据求得的最佳直线通过$(\bar{x},\bar{y})$点。

（3）$\hat{a}$和$\hat{b}$的不确定度

从数理统计知识可得

y_i的实验标准偏差为

$$s=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2}{n-2}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{a}x_i-\hat{b})^2}{n-2}} \qquad (1.4.12)$$

$\hat{a}$的实验标准偏差为

$$s_{\hat{a}}=\frac{s}{\sqrt{n(\overline{x^2}-\bar{x}^2)}} \qquad (1.4.13)$$

$\hat{b}$的实验标准偏差为

$$s_{\hat{b}}=\sqrt{\overline{x^2}}\cdot s_{\hat{a}} \qquad (1.4.14)$$

作为实验标准差的$s_{\hat{a}}$与$s_{\hat{b}}$，其数值分别就是$\hat{a}$与$\hat{b}$的标准不确定度的数值。

（4）相关系数

上面是首先假设x与y存在线性关系，然后根据实验数据求得斜率和截距，但x与y是否真的存在线性关系，还需要检验，如果不存在，那么算出的$\hat{a}$和$\hat{b}$是无意义的，这里我们给出相关系数（r）的表达式并予以定性说明。

定义相关系数
$$r=\frac{\overline{xy}-\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{(\overline{x^2}-\bar{x}^2)\;(\overline{y^2}-\bar{y}^2)}} \qquad (1.4.15)$$

下面对r作几点说明：

①r取值的大小反映了x与y线性关系的程度 。

②可以证明：$0\le|r|\le 1$

③当$r>0$时称为正相关，$r<0$时，称为负相关，当$r=0$时，说明x, y不相关；

④r =1称为完全相关，说明x与y成确定的线性关系。

⑤$|r|$值越接近1，说明x与y线性关系的程度越大。

例：用最小二乘法对表 1.4.1 数据进行处理

设$x=U, y=I$,利用计算器(机)处理可得：

$$\hat{a} = 0.251 \times 10^{-3}$$
$$\hat{b} = 3.78 \times 10^{-6} A$$
$$\gamma = 0.9999$$

则 $\frac{1}{\hat{a}} = 3.98 \times 10^{3}$，由于 $b \approx 0$，所以 $I = \frac{U}{3980}$，即电阻 $R = 3980\Omega$。

由于相关系数 $r \approx 1$,说明用线性函数拟合实验数据是合理的。

【参考文献】

[1] 叶德培. 测量不确定度理解评定与应用．北京：中国计量出版社，2007

[2] 李金海. 误差理论与测量不确定度评定．北京：中国计量出版社，2003

[3] 沙定国. 误差分析与测量不确定度评定．北京：中国计量出版社，2003

[4] 李慎安. 测量不确定度表达百问．北京：中国计量出版社，2000

[5] 王中宇等. 测量误差与不确定度评定．北京：科学出版社，2008

[6] 倪育才. 实用测量不确定度评定．北京：中国计量出版社，2009

[7] 林景星等. 计量基础知识．北京：中国计量出版社，2008

[8] 吕斯骅. 全国中学生物理竞赛实验指导书．北京：北京大学出版社，2006